UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Larisa Dakskobler

Spernerjeva lema in poštene delitve

DIPLOMSKO DELO NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

MENTORICA: prof. dr. Neža Mramor-Kosta

Ljubljana, 2016

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Problem poštenih delitev srečujemo pogosto, tako v vsakdanjem življenju kot tudi v ekonomiji, politiki, mediaciji ali pri alokaciji različnih virov in dobrin. Ob primernih predpostavkah lahko delitev med n igralcev opišemo s primerno označeno triangulacijo n-dimenzionalnega simpleksa in rešitev problema poštene delitve poiščemo s pomočjo kombinatoričnega izreka, ki je znan pod imenom Spernerjeva lema. V diplomski nalogi opišite pojem poštene delitve in matematično formulacijo problema poštene delitve, ki temelji na Spernerjevi lemi, in predstavite nekaj onovnih algoritmov za reševanje problema. Različne algoritme primerjajte med seboj in izbrani algoritem implementirajte v obliki aplikacije za reševanje dveh osnovnih problemov: problem poštenega razreza torte in problem poštene delitve najemnine med sostanovalce.

IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisana Larisa Dakskobler, sem avtorica diplomskega dela z naslovom:

Spernerjeva lema in poštene delitve

S svojim podpisom zagotavljam, da:

– sem diplomsko delo izdelala samostjno pod mentorstvom prof. dr. Neže Mramor-Kosta,

– so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,

– soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki »Dela FRI«.

V Ljubljani, dne 13. marec 2016 Podpis avtorice:

Rada bi se zahvalila svoji mentorici, prof. dr. Neži Mramor-Kosta, za strokovno svetovanje, usmerjanje in pomoč pri izdelavi diplomske naloge. Zahvala gre tudi moji družini za vso podporo tekom študija.

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic

kratica	angleško	slovensko
FIFO	First-In, First-Out	FIFO način računalniške obdelave podatkov, kjer se najprej obdelajo podatki, ki so bili prvo vnešeni

Povzetek

Problem poštenih delitev je aktualno raziskovalno področje v matematiki, ekonomiji, računalništvu, itd. Obstaja več vrst problemov, ki so pogosto poimenovani po vsakdanjih situacijah: pošteno razdeljevanje virov, rezanje torte, poštena delitev opravil, dodeljevanje sobe – delitev najemnine,… Čeprav že obstaja veliko natančnih kot tudi aproksimativnih metod za iskanje rešitev, se področje še vedno razvija in išče čim boljše rešitve za vsakdanje težave. Cilj diplomskega dela je bil poiskati, na strnjen način predstaviti in primerjati metode za reševanje problemov poštenih delitev, ki temeljijo na Spernerjevi lemi. Predstavljeni so naslednji aproksimativni postopki: Simmonsova metoda za reševanje problema rezanja torte, Sujev postopek za reševanje problema dodeljevanja sob – delitve najemnine in Scarfov algoritem za izračun ekonomskega ravnovesja. Izdelana je aplikacija z grafičnim uporabniškim vmesnikom, ki omogoča testiranje delovanja opisanih postopkov.

Ključne besede: poštene delitve, Spernerjeva lema, rezanje torte, dodeljevanje sob – delitev najemnine.

Abstract

Fair division is an active research area in Mathematics, Economics, Computer Science, etc. There are many different kinds of fair division problems. These are often named after everyday situations: fair resource allocation, fair cake-cutting, fair chore division, room assignment – rent division, and more. Although many exact and approximative methods for finding fair solutions already exist, the area of fair division still expands and tries to find better solutions for everyday problems. The objective of the thesis was to find, present and compare methods based on Sperner's Lemma, that can be used for solving different fair division problems. The thesis presents next approximative methods: Simmons' approach to cake-cutting, Su's approach to room assignment – rent division and Scarf's method for computation of equilibrium prices. An application with graphical user interface was build, which allows us to try out described methods in different test scenarios.

Keywords: fair division, Sperner's Lemma, cake-cutting, room assignment – rent division.

Poglavje 1: Uvod

S problemom poštenih delitev se človek srečuje vsak dan. Naj gre za razdelitev gospodinjskih opravil med družinske člane, dodeljevanje parkirnih prostorov zaposlenim, deljenje zapuščine ali celo organizacijo letalskega prometa – vedno je prisotno iskanje čim bolj zadovoljive rešitve. Problem poštenih delitev je namreč ravno to – deljenje množice objektov med t.i. igralce, tako da bo vsak izmed njih prejel pošten delež.

Obstaja več kriterijev, ki določajo, kdaj naj bi bila neka rešitev poštena. Izid delitve je med drugim odvisen od vrste objektov, ki se jih deli, in narave udeležencev ter njihovih prioritet. Zato ni nič čudnega, da se za vsakdanjimi situacijami skriva aktualen problem, ki ga proučujejo matematika, ekonomija, teorija iger in druga raziskovalna področja.

V matematiki je problem poštenih delitev idealizacija življenjskih primerov. Kriteriji, ki določajo različne stopnje poštenosti, so natančno določeni. Osnovni cilj je iskanje postopkov, ki zagotavljajo pošteno delitev za dano situacijo. Ti postopki lahko temeljijo na Spernerjevi lemi, izreku iz teorije grafov, ki ima pomembno vlogo v topologiji.

Spernerjeva lema, poimenovana po svojem avtorju Emanuelu Spernerju, izvira iz leta 1928. Trdi, da vsako ustrezno barvanje triangulacije n-dimenzionalnega simpleksa vsebuje celico oz. manjši n-dimenzionalni simpleks, obarvan s samimi različnimi barvami. Lema ni uporabna samo za iskanje rešitev pri problemu poštenih delitev, temveč se (med drugim) uporablja še kot osnova za iskanje kompleksnih ničel polinoma, določanje kritičnih točk v računski dinamiki tekočin pri hidrodinamiki in dokazovanje Brouwerjevega izreka o fiksni točki iz topolgije, slednjega pa se uporablja za dokazovanje Arrow-Debreujevega izreka o obstoju splošnega ravnovesja v ekonomiji [8].

Obstaja veliko postopkov za reševanje problemov poštenih delitev, vendar so v večini primerov namenjeni le ožjemu krogu uporabnikov. Da bi področje poštenih delitev približali širši javnosti, so A. D. Procaccia in njegovi sodelavci leta 2014 razvili Spliddit [13]. Spliddit je spletna stran, ki obiskovalcem ponuja prosto dostopne spletne aplikacije za reševanje problemov poštenih delitev. Trenutno je na voljo pet aplikacij. Te obiskovalcem omogočajo, da pošteno razdelijo opravila ali dobrine, poiščejo pošteno razdelitev plačila prevoza s taksijem, ugotovijo, kakšna bi bila poštena porazdelitev najemnine med sostanovalce glede na dodeljene sobe, in se informirajo, kakšna je poštena navedba avtorjev glede na njihov prispevek pri ustvarjanju nekega dela.

Ker so poštene delitve aktualno področje, sem se želela z njimi podrobneje seznaniti. Cilj diplomskega dela je bil poiskati, na strnjen način predstaviti in primerjati metode za reševanje problemov poštenih delitev, ki temeljijo na Spernerjevi lemi. Zaradi velikega števila natančnih in aproksimativnih postopkov (npr. [2, 3, 4, 7]) sem se osredotočila na metode za zvezne in mešane poštene delitve ter izbrala dve metodi [3, 4] s področja matematike in ekonomije, ki izhajata neposredno iz konstruktivnega dokaza Spernerjeve leme. Vsaka izmed njiju je bila prilagojena za reševanje zveznega problema rezanja torte in mešanega problema dodeljevanja sob – delitve najemnine. Za lažjo primerjavo in prikaz delovanja opisanih metod je bil za vsako vrsto problema implementiran po en algoritem.

Diplomska naloga je razdeljena na štiri dele. Začetek prvega dela podrobneje opredeli poštene delitve. Sledi nekaj osnovnih matematičnih pojmov, ki se uporabljajo v nadaljevanju diplomskega dela. Drugo poglavje je namenjeno uporabljenim metodam – skozi celotno poglavje se seznanja s Spernerjevo lemo in načini, kako jo je mogoče uporabiti pri iskanju rešitev problemov poštenih razdelitev. V tretjem delu je predstavljena implementacija metod, opisanih v predhodnem poglavju. Prikazani so zaslonski posnetki razvitega grafičnega uporabniškega vmesnika in podana kratka navodila za uporabo izdelane aplikacije. Zadnji del je namenjen rezultatom. Narejena je časovna in prostorska analiza uporabljenih algoritmov. Določeni so kriteriji poštenosti, ki jih posamezna metoda izpolnjuje. Predstavljenih je tudi nekaj njihovih prednosti in slabosti.

Poglavje 2: Osnovni pojmi

Kot je že bilo navedeno v uvodnem poglavju, so poštene delitve problem, pri katerem med množico ljudi razdelimo skupino objektov, tako da vsak izmed udeležencev prejme pošten delež, pri iskanju poštene rešitve pa si lahko pomagamo s Spernerjevo lemo. To poglavje najprej poda osnovne informacije o poštenih delitvah - kakšna je njihova formalna opredelitev, kakšne objekte se lahko deli in kakšna so kriteriji za pošteno razdelitev. Sledi še predstavitev Spernerjeve leme.

2.1 Poštene delitve

2.1.1. Formalna opredelitev

V splošnem lahko problem poštene delitve definiramo kot dvojico $< I, A >$: $I = \{i_1,\ i_2, \dots, i_n\}$ je skupina n igralcev, med katere delimo množico objektov $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_m\}$, $m \geq n$. Vsak izmed igralcev prejme pošten delež – t.j. delež, za katerega igralec verjame, da je vreden vsaj $\frac{1}{n}$ celotne vrednosti množice objektov A. Pri postopku delitve vedno predpostavimo, da je igralec sposoben določiti vrednost vsakemu izmed objektov in lahko oceni, ali je njegov prejeti delež zares pošten.

2.1.2. Deljeni objekti

Objekti, ki jih delimo med igralce, so lahko nedeljivi (npr. avto, umetniško delo, hišni ljubljenček,…) ali deljivi (npr. denar, torta,…) [9]. Medtem ko vsak nedeljiv objekt v celoti dodelimo le enemu igralcu, lahko množico deljivih objektov razdelimo na neskončno mnogo načinov. Objekti so lahko tudi heterogeni in homogeni. Prvi imajo več različnih sestavnih delov (npr. torta), pri drugih je pomembna le prejeta količina (npr. denar). Ko iščemo najprimernejšo metodo za delitev množice objektov, običajno upoštevamo tudi zaželjenost objektov. Ti so lahko zaželjeni (npr. umetniško delo) ali nezaželjeni (npr. hišna opravila).

Probleme poštenih delitev delimo glede na lastnosti objektov. Uporabljali bomo delitev, predstavljeno na spletnem naslovu [10], ki poštene delitve razlikuje glede na deljivost objektov. Ločimo:

- zvezne poštene delitve, kjer so deljeni objekti deljivi,
- diskretne poštene delitve, pri katerih so objekti nedeljivi,

- mešane poštene delitve, ki vsebujejo tako zvezne kot diskretne komponente.

Znana primera zveznih poštenih delitev sta pošteno razdeljevanje virov (ang. *fair resource allocation*), kjer delimo deljive in homogene elemente, in pošteno rezanje torte (ang. *fair cake-cutting*), kjer so objekti deljivi, heterogeni in zaželjeni. Med diskretne poštene delitve uvrščamo pošteno dodelitev predmetov (ang. *fair item assignment*), pri kateri so objekti nedeljivi in heterogeni. Deljenje heterogenih in nezaželjenih objektov se imenuje tudi poštena delitev opravil (ang. *fair chore division*), če so ta opravila deljiva, oz. poštena dodelitev opravil (ang. *fair chore assignment*), če niso. Primera mešane poštene delitve sta deljenje dediščine in t.i. dodeljevanje sobe - delitev najemnine (ang. *room assignment – rent division*).

2.1.3. Kriteriji poštenosti

Večina metod za reševanje problema poštenih delitev se osredotoča na subjektivno poštenost. To pomeni, da lahko vsak izmed igralcev izrazi svoje želje, ki jih poskušamo pri reševanju problema izpolniti. Torej mora vsak izmed udeležencev imeti osebno, subjektivno vrednotenjsko funkcijo V_i, s katero določi numerično vrednost posameznega objekta a_j ali podmnožice A_j vseh objektov A. Običajno normaliziramo vrednotenjske funkcije: prazne množice objektov prejmejo oceno 0, celotna zbirka objektov pa oceni 1 (če so vsi objekti zaželjeni) oz. -1 (vsi objekti so nezaželjeni).

Na podlagi subjektivnih vrednotenjskih funkcij so nastali različni kriteriji poštenosti [1], ki se uporabljajo pri problemu poštenih delitev. Nekateri izmed njih si nasprotujejo, vendar se jih da pogosto tudi kombinirati. Nekaj izmed kriterijev je naštetih v nadaljevanju:

- Sorazmerna delitev (ang. *proprotional division*), imenovana tudi enostavna poštena delitev, pomeni, da vsak izmed n igralcev prejme množico objektov, ki je po njegovi lastni oceni vredna vsaj $\frac{1}{n}$ celotne vrednosti vseh objektov: $V_i(A_i) \geq \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$.
- Delitev brez zavisti (ang. *envy-free division*) zagotavlja, da nihče ne želi prejeti deleža koga drugega bolj, kot želi imeti svojega. Drugače povedano, vsak izmed igralcev ocenjuje svoj delež za vsaj toliko, kot ocenjuje deleže drugih ($V_i(A_i) \geq V_j\left(A_j\right), i, j = 1, \dots, n$).
- Natančna delitev (ang. *exact division*) je tista, kjer vsak igralec verjame, da so vsi udeleženci (vključno z njim) prejeli natanko enak pošten delež: $V_i(A_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$.
- Nepristranska delitev (ang. *equitable division*) pomeni, da vsak igralec čuti enako stopnjo sreče oz. delež, ki ga igralec prejme je (po njegovih ocenah) enak deležu kateregakoli drugega igralca: $V_i(A_i) = V_j\left(A_j\right), i, j = 1, \dots, n$.

Pogosto je zaželjeno, da je poštena delitev tudi Pareto optimalna (tudi Pareto učinkovita), kar pomeni, da nobena druga dodelitev objektov ne bi nekomu izboljšala prejetega deleža, ne da bi pri tem oškodovala nekoga drugega.

2.2 Spernerjeva lema

2.2.1. Simpleksi

Definicije so povzete po Huangu [5].

Definicija 2.1: Množica $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ v vektorskem prostoru V je **linearno neodvisna**, če enačba

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad (1)$$

velja le pri $\alpha_i = 0$ za $i = 0,1, \dots, n$.

Definicija 2.2: Množica $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ v vektorskem prostoru V je **afino neodvisna**, če je $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ linearno neodvisna.

Defnicija 2.3: Naj bodo $v_0, v_1, \dots, v_n$ afino neodvisne točke v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^m$, $m > n$. Konveksno ovojnico točk $v_0, v_1, \dots, v_n$ imenujemo ***n*–simpleks** ali **simpleks dimenzije *n***. Označimo jo z $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$.

Vsako točko x n–simpleksa lahko izrazimo kot linearno kombinacijo točk $v_0, v_1, \dots, v_n$:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \;, \quad (2)$$

pri čemer je $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \leq 1$ in $\lambda_i > 0$ za vsak i. Koeficiente λ_i iz enačbe (2) imenujemo tudi baricentrične koordinate točke x.

Definicija 2.4: Naj bosta σ in S simpleksa v $\mathbb{R}^n$. Simpleks σ je **lice** simpleksa S, če je množica oglišč simpleksa σ podmnožica množice oglišč simpleksa S. Simpleks σ je ***k*-lice** simpleksa S, če množica oglišč simpleksa σ vsebuje $k+1$ elementov in je podmnožica množice oglišč simpleksa S.

Definicija 2.5: Triangulacija *n*-simpleksa *S* je zbirka n-simpleksov, za katere velja, da:

- je njihova unija enaka S,
- se dva poljubna n-simpleksa sekata v skupnem licu ali je njun presek prazna množica.

Vsak n-simpleks iz triangulacije imenujemo **elementarni simpleks**.

Definicija 2.6: Lice, ki je napeto na $n-1$ izmed n oglišč simpleksa S, imenujemo **glavno lice**.

2.2.2. Spernerjeva označitev in Spernerjeva lema

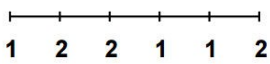
Naj bo S n–simpleks in T njegova triangulacija. Najprej dodelimo oznake 1, 2, …, $n+1$ glavnim licem simpleksa S in nato poiščemo Spernerjevo označitev za oglišča triangulacije. Označitev oglišč triangulacije je Spernerjeva, če:

- vsako oglišče na glavnem licu j simpleksa S označimo z enim izmed števil 1, 2, …, $n+1$, ki je različno od j,
- ogliščem v notranjosti dodelimo poljubno oznako izmed 1, 2, …, $n+1$.

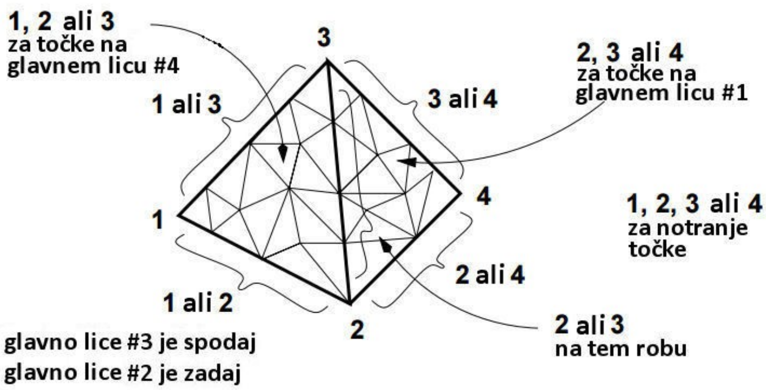
Namesto glavnih lic lahko najprej označimo oglišča S. Dodelimo jim oznake 1, 2, …, $n+1$. Nato označimo oglišča T, ki ležijo na 1-licih simpleksa S. Vsakemu oglišču T, ki leži na 1-licu σ_1, dodelimo eno izmed oznak oglišč σ_1. Postopek ponovimo še za preostala oglišča T, ki ležijo na k-licih, $k = 2, \dots, n$.

Primera Spernerjeve označitve sta prikazana na Sliki 2.1 in Sliki 2.2.

Če je označitev simpleksa S s triangulacijo T Spernerjeva, je Spernerjeva tudi označitev njegovih glavnih lic.

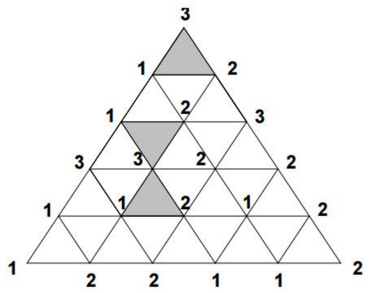


Slika 2.1: Triangulirana daljica, označena s Spernerjevo označitvijo [3].



Slika 2.2: Trianguliran tetraeder, označen s Spernerjevo označitvijo [3].

Elementarni simpleks v triangulaciji je polno označen, če imajo njegova oglišča različne oznake (Slika 2.3).



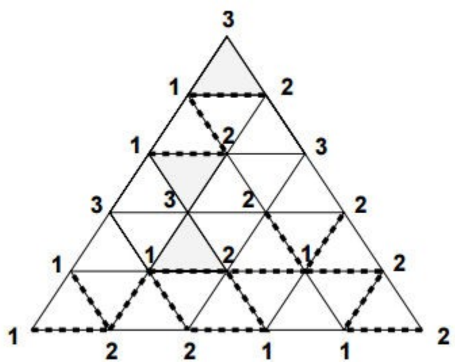
Slika 2.3: Polno označeni elementarni trikotniki v 2-simpleksu so obarvani temneje [3].

Osnova algoritmov, ki jih bomo opisali v tem delu, je Spernerjeva lema.

Izrek 2.7 (Spernerjeva lema): Vsaka triangulacija n-simpleksa s Spernerjevo označitvijo vsebuje liho število polno označenih elementarnih n-simpleksov.
Dokaz:
Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije na dimenzijo n. Dokaz je povzet po Suju [3].

$n = 1$: Trianguliran 1-simpleks je na več delov razdeljena daljica, kot je prikazano na Sliki 2.1. Krajišči daljice sta različno označeni z oznakama 1 in 2. Na poti iz krajišča 1 v krajišče 2 se morajo oznake spremeniti liho-krat. To pomeni, da je na poti iz krajišča 1 v krajišče 2 liho število elementarnih daljic, označenih z (1,2).

$n - 1 \rightarrow n$: Predpostavimo, da izrek velja za triangulacije 1-simpleksov, 2-simpleksov, …, $(n-1)$-simpleksov, označene s Spernerjevo označitvijo. Dokazati moramo, da izrek drži tudi za trianguliran n-simpleks S, v katerem so oglišča triangulacije označena s Spernerjevo označitvijo.
Simpleks S si lahko predstavljamo kot "hišo". S triangulacijo razdelimo simpleks S na elementarne simplekse ali "sobe". Glavno lice sobe imenujemo "vrata", če je označeno z oznakami 1, 2, …, n (Slika 2.4).



Slika 2.4: Hiša (trikotnik), sobe (majhni trikotniki) in vrata ((1,2)-robovi), označena črtkano [3].

Zaradi uporabe Spernerjeve označitve ločimo tri vrste sob:

- sobe z vhodnimi in izhodnimi vrati so označene z n različnimi oznakami 1, 2, …, n,
- sobe, ki imajo le vhodna vrata, so označene z $n + 1$ različnimi oznakami,
- preostale sobe so skrivne, saj nimajo ne vhoda ne izhoda.

Da bi dokazali izrek, moramo najprej poiskati vse polno označene elementarne simplekse. Iščemo torej sobe, ki imajo natanko ena vrata. V hišo vstopimo skozi poljubna vrata simpleksa S. Ker se vrata za nami zaprejo in zaklenejo, imamo dve možnosti:

- če ima soba še ena vrata, izkoristimo izhod iz trenutne sobe,
- soba nima dodatnih vrat, kar pomeni, da smo prispeli na cilj in našli polno označeni elementarni simpleks.

Postopek prehajanja med sobami ponavljamo, dokler ne pridemo do vrat, ki vodijo izven hiše, ali se sprehod po hiši uspešno zaključi v polno označeni sobi.

Drugi del dokaza se nanaša na število polno označenih sob. Ker je število sob v hiši končno, je tudi število vrat simpleksa S končno. Vsaka izmed njih vodijo v sprehod, ki se konča v polno označeni sobi ali izven hiše. Število polno označenih sob je torej največ enako številu vrat simpleksa S.

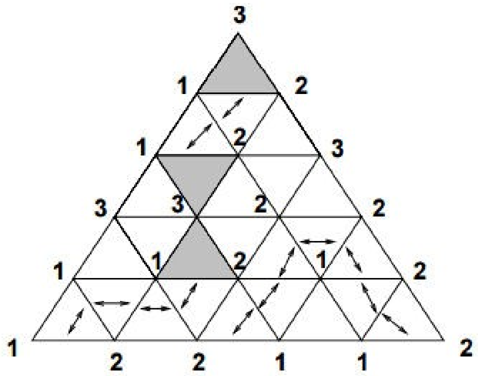
Vrata simpleksa S so $(n-1)$-simpleksi, ki ležijo na enem izmed glavnih lic simpleksa S. Vsako glavno lice simpleksa S je $(n-1)$-simpleks, označen s Spernerjevo označitvijo, torej zanj velja Spernerjeva lema in vsebuje liho število polno označenih elementarnih $(n-1)$ simpleksov. Slednji so ravno vrata simpleksa S, torej je število vrat simpleksa S liho.

Če vsaka vrata simpleksa S pripeljejo do polno označene sobe, je število polno označenih sob enako številu vrat. Če sprehoda po hiši ne končamo v polno označeni sobi, ampak izven hiše, obstaja parno število vrat (vhodna in izhodna vrata), ki ne vodijo do polno označene sobe. V obeh primerih je število polno označenih sob liho.

V triangulaciji se lahko pojavijo polno označene sobe, do katerih ne moremo priti z vstopom skozi vrata simpleksa S. Takšne sobe vedno nastopajo v parih: če začnemo sprehod po hiši v eni izmed teh sob, se naša pot konča v drugi polno označeni sobi.

Ker je število polno označenih sob, dostopnih skozi vrata simpleksa S, liho in število preostalih polno označenih sob sodo, je skupno število polno označenih sob liho. $\square$

Na Sliki 2.5 je prikazan primer sprehajanja po hiši.



Slika 2.5: Prehajanje skozi vrata [3].

Poglavje 3: Opis metod in algoritmov

Poglavje 3 je namenjeno predstavitvi načinov reševanja problemov zveznih in mešanih poštenih delitev. V nadaljevanju so opisani štirje algoritmi (Su [2], Scarf [3]), ki izhajajo neposredno iz konstruktivnega dokaza Spernerjeve leme, po dve metodi za vsako vrsto poštenih delitev. Ker obstaja več različnih problemov tako za zvezne kot tudi za mešane delitve, smo za lažjo predstavitev metod uporabili dva specifična problema: rezanje torte in dodeljevanje sobe - delitev najemnine. Rezanje torte je primer zveznih poštenih delitev z deljivimi, heterogenimi in zaželjenimi objekti. Za predstavnika mešanih poštenih delitev smo izbrali problem dodeljevanja sob – delitve najemnine, kjer so sobe nedeljive, homogene in zaželjene ter plačilo najemnine deljivo, homogeno in nezaželjeno.

3.1 Triangulacije simpleksa

3.1.1. Baricentrična subdivizija

Elementarne simplekse triangulacije T lahko na več načinov razrežemo na manjše simplekse. Dobljeni novi triangulaciji pravimo subdivizija triangulacije T. Ena od možnih subdivizij je baricentrična subdivizija. Sledeče definicije in lema so povzete po Vicku [6].

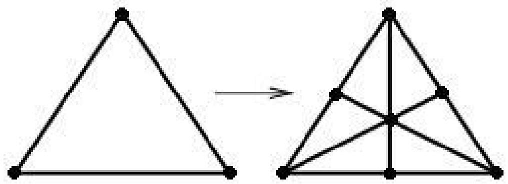
Naj bo S n-simpleks z množico oglišč $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$. Baricenter $b(S)$ simpleksa S je točka S:

$$b(S) = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+1}}{n+1}. \tag{3}$$

Za vsak i, $1 \leq i \leq n+1$, so točke $b(S), v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$ oglišča nekega n-simpleksa.

Baricentrično subdivizijo $\mathrm{Sd}(S)$ simpleksa S definiramo s pomočjo indukcije na dimenzijo n. Množico k-lic n-simpleksa S označimo s S^k. Pri $k = 0$ je baricentrična subdivizija $\mathrm{Sd}(S^0)$ kar enaka S^0. Če poznamo baricentrično subdivizijo $\mathrm{Sd}(S^{k-1})$, lahko poiščemo baricentrično subdivizijo $\mathrm{Sd}(S^k)$. Za poljubno k-lice $\sigma \in S^k$ najprej poiščemo njegov baricenter in ga dodamo med oglišča baricentrične subdivizije $\mathrm{Sd}(S^k)$. Dobljeni baricenter povežemo z oglišči iz baricentrične subdivizije $\mathrm{Sd}(\sigma^{k-1})$ glavnih lic simpleksa σ. Postopek ponovimo še za preostala lica k-lica iz S^k, da dobimo $\mathrm{Sd}(S^k)$.

Primer baricentrične subdivizije je prikazan na Sliki 3.1.



Slika 3.1: Baricentrična subdivizija 2-simpleksa.

Definicija 3.1: Premer $\mathrm{diam}(A)$ množice A v evklidskem prostoru je supremum razdalj med dvema točkama iz množice A.

Lema 3.2: Naj bo δ premer n-simpleksa oz. dolžina najdaljšega roba v simpleksu. Potem meri najdaljši rob v $\mathrm{Sd}(S)$ največ $\frac{n}{n+1}\delta$.

Dokaz:

Izrek bomo dokazali z indukcijo na dimenzijo simpleksa. Dokaz je povzet po Vicku [6].

$n = 0$: Premer 0-simpleksa je enak $\delta = 0$. Ker je baricentrična subdivizija 0-simpleksa S enaka S, je tudi najdaljši rob v $\mathrm{Sd}(S)$ enak 0, tako kot v S.

$n - 1 \to n$: Predpostavimo, da izrek velja za dimenzije 1, 2, …, $n - 1$. Iščemo dolžino najdaljšega roba v baricentirčni subdiviziji n-simpleksa S.

Naj bo τ poljuben $(n-1)$-simpleks iz $\mathrm{Sd}(S)$. Njegova oglišča označimo z $u_1, u_2, \dots, u_n$. Glavno lice simpleksa S, ki vsebuje τ, označimo s σ. Naj bo ρ elementarni simpleks iz $\mathrm{Sd}(S)$ z množico oglišč $\{b(S), u_1, u_2, \dots, u_n\}$, pri čemer je $b(S)$ baricenter simpleksa S.

Dolžina najdaljšega roba v simpleksu ρ je enaka $\mathrm{diam}\,\rho = \max\{\|u_i - u_j\|, \|u_i - b(S)\|\}$.

Najprej nas zanima vrednost $\|u_i - u_j\|$. Zaradi induktivne predpostavke velja:

$$\|u_i - u_j\| \le \mathrm{diam}\,\tau \le \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{diam}\,\sigma\,.$$

Ker je $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$ naraščujoča funkcija in je premer poljubnega lica manjši ali enak premeru simpleksa, velja

$$\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{diam}\,\sigma \le \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \cdot \mathrm{diam}\,S\,.$$

Torej je $\|u_i - u_j\| \le \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \cdot \delta$.

Poiskati moramo še vrednost $\|u_i - b(S)\|$. Če oglišča simpleksa S označimo z $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, je baricenter $b(S)$ enak $b(S) = \frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n+1}}{n+1}$. Vsako oglišče u_i je tudi točka v S, zato lahko pišemo:

$$\|u_i - b(S)\| \leq \|v_j - b(S)\| .$$

Desno stran neenakosti lahko zapišemo drugače:

$$\|v_j - b(S)\| = \left\|v_j - \frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n+1}}{n+1}\right\| = \| \textstyle\sum_{i\neq j} \frac{v_j - v_i}{n+1} \| .$$

Zgornjo vsoto n členov lahko omejimo navzgor:

$$\left\|\sum_{i\neq j} \frac{v_j-v_i}{n+1}\right\| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i\neq j}\|v_j - v_i\| \leq \frac{n}{n+1} \cdot \max\|v_j - v_i\| \leq \frac{n}{n+1} \cdot \operatorname{diam} S .$$

Tudi vrednost $\|u_i - b(S)\|$ je enaka največ $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \cdot \delta$.

Premer simpleksa ρ je torej navzgor omejen z $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \cdot \delta$.

Ker velja enaka omejitev za premere vseh simpleksov iz $\mathrm{Sd}(S)$, je Lema 3.2 dokazana. ☐

3.1.2. Hansen-Kuhnova subdivizija

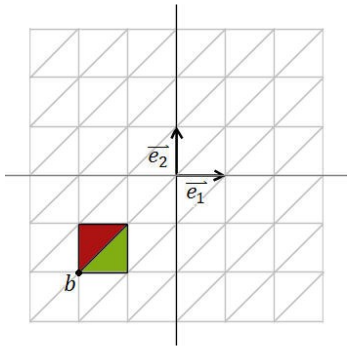
Najprej bomo opisali postopek za triangulacijo celotnega n-dimenzionalnega evklidskega prostora in ga nato prilagodili še za subdivizijo simpleksov. Oba postopka sta povzeta po Scarfu [3], kjer so navedene podrobnejše izpeljave in utemeljitve korakov.

Naj bodo $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ baza prostora $\mathbb{R}^n$. Množica vseh simpleksov z oglišči

$$\begin{aligned} v_1 &= b \\ v_2 &= v_1 + \overrightarrow{e_{\varphi_1}} \\ v_3 &= v_2 + \overrightarrow{e_{\varphi_2}} \\ &\vdots \\ v_{n+1} &= v_n + \overrightarrow{e_{\varphi_n}} , \end{aligned} \tag{4}$$

kjer je b poljubna celoštevilska linearna kombinacija vektorjev $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ in $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ permutacija števil 1, 2, …, n, tvori (skupaj z vsemi lici simpleksov) triangulacijo prostora $\mathbb{R}^n$.

Slika 3.2 prikazuje triangulacijo ravnine, dobljeno z opisanim postopkom.



Slika 3.2: Simplicialna subdivizija ravnine. Obarvana sta trikotnika, ki imata oglišče $v_1$enako $v_1 = b = (-2, -2)$. Rdeči trikotnik ustreza permutaciji $(2, 1)$, zeleni pa permutaciji $(1, 2)$.

Vzemimo n-simpleks $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \rangle$ iz opisane triangulacije. Sosednje simplekse, ki si z njim delijo eno glavno lice, dobimo z zamenjavo enega izmed oglišč S. Zamenjava $\hat{v}_j$ oglišča v_j je enaka

$$\hat{v}_j = v_{j-1} + v_{j+1} - v_j \ . \tag{5}$$

Če, na primer, oglišče v_2 zamenjamo za $\hat{v}_2$,

$$\hat{v}_2 = v_{2-1} + v_{2+1} - v_2 = v_1 + v_3 - v_2 \ ,$$

dobimo simpleks, ki si s simpleksom S deli glavno lice $\langle v_1, v_3, \dots, v_{n+1} \rangle$. Če na ta način zamenjamo vsa oglišča, pri čemer za oglišči v_1 in v_{n+1} uporabimo formuli

$$\hat{v}_1 = v_{n+1} + v_2 - v_1$$

in

$$\hat{v}_{n+1} = v_n + v_1 - v_{n+1} \ ,$$

dobimo vse sosede simpleksa S.

V nadaljevanju bomo simpleks

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1 \ \wedge \ x_i \geq 0\} \ ,$$

imenovali enotski ali standardni n-simpleks v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Hansen-Kuhnovo subdivizijo enotskega simpleksa dobimo s podobnim postopkim kot za celoten prostor.

Oglišča v simplicialni subdiviziji

$$v_j = (\frac{x_{j,1}}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n+1}}{D}),$$

pri čemer je D pozitivno celo število, ki določa velikost triangulacije, in $x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n+1}$ nenegativna cela števila, katerih vsota je enaka D, dobimo z naslednjim postopkom.

Izberimo vektorje

$$\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 0, \dots, 0)$$
$$\overrightarrow{e_2} = (0, 1, -1, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, \dots, 1, -1) \tag{6}$$

v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. Vektor $\overrightarrow{e_j}$ ima j-to koordinato enako 1, $(j+1)$-to koordinato pa -1.

Elementarne simplekse v subdiviziji simpleksa S podamo z $b = (\frac{b_1}{D}, \frac{b_2}{D}, \dots, \frac{b_{n+1}}{D})$, kjer so $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ nenegativna cela števila, katerih vsota je enaka D, permutacijo $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ števil 1, 2, …, n s predpisom:

$$v_1 = b$$
$$v_2 = v_1 + \frac{\overrightarrow{e_{\varphi_1}}}{D}$$
$$v_3 = v_2 + \frac{\overrightarrow{e_{\varphi_2}}}{D}$$
$$\vdots$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{\overrightarrow{e_{\varphi_n}}}{D}\,. \tag{7}$$

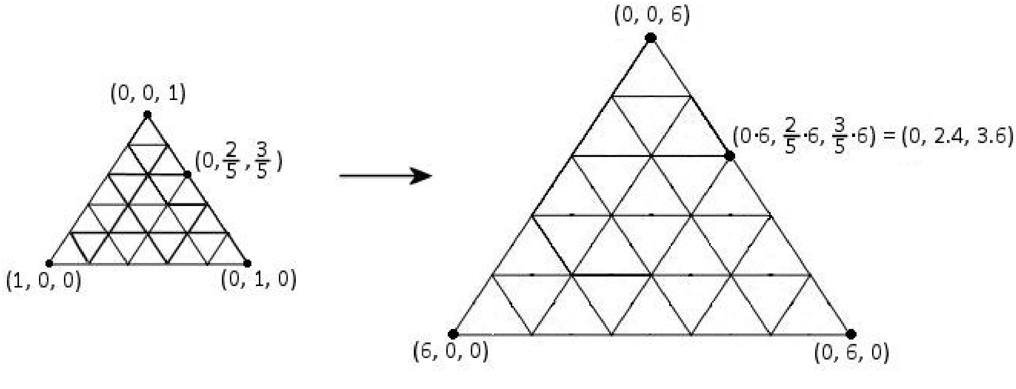
Postopek zamenjave poljubnega oglišča ostaja enak kot pri simplicialni subdiviziji evklidskega prostora.

Hansen-Kuhnovo subdivizijo simpleksa

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = c \ \wedge \ x_i \geq 0 \ \wedge \ c > 0\}\,,$$

dobimo tako, da koordinate oglišč v Hansen-Kuhnovi subdiviziji enotskega simpleksa pomnožimo s c.

Primer Hansen-Kuhnove subdivizije enotskega 2-simpleksa in njegovega raztega je prikazan na Sliki 3.3.



Slika 3.3: Primer Hansen-Kuhnove subdivizije za c=5 in D=10.

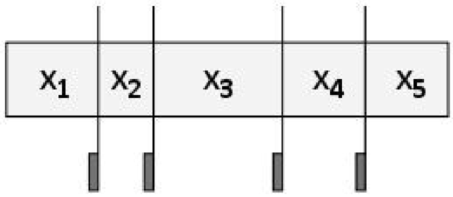
3.2 Rezanje torte

Opis problema: Torto pravokotne oblike moramo razrezati na n kosov in vsakega izmed njih dati eni izmed n oseb. Želje jedcev se lahko razlikujejo: nekdo želi čim večji kos peciva, drugemu je pomembno, da dobi kos s češnjo ali pa ima raje kos brez sadja in z ogromno smetane. Cilj je najti takšno razdelitev torte, da bodo vsi jedci zadovoljni s prejetim kosom.

3.2.1. Simmonsov postopek

Preprosta metoda za reševanje problema rezanja torte je Simmonsov postopek [3].

Za rezanje torte uporabimo $n-1$ nožev. Z vsakim naredimo natanko 1 rez, vzporeden z levim robom torte (Slika 3.4).



Slika 3.4: Razrez pravokotne torte [3].

Velikost torte in posameznih kosov lahko predstavimo z odstotki ali relativnim deležem in tako natančno določimo naš razrez. Velikost torte je torej enaka 1, velikost i-tega kosa pa označimo z x_i. Razrez predstavimo z n-terico $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, pri čemer je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ in $0 \le x_i \le 1$ za vsak i. Prostor S vseh možnih razrezov tako tvori $(n-1)$-simpleks v $\mathbb{R}^n$.

Pravimo, da pri danem razrezu neka oseba daje prednost dobljenemu kosu, če ji noben drug kos iz razreza ni ljubši od njenega.

Pri reševanju problema rezanja torte predpostavimo:

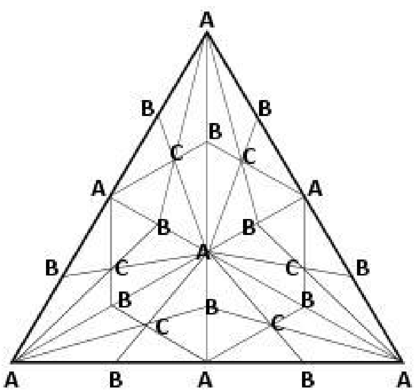
- Želje enega jedca so neodvisne od želja drugih.
- Jedci so lačni, t.j. vsak izmed igralcev raje prejme kos torte, kot da bi ostal brez sladice.
- Množice želja so zaprte: če oseba daje prednost nekemu zaporedju kosov v konvergentnem zaporedju razrezov, potem bo limitni kos njen priljubljen kos tudi v limitnem razrezu.

Izrek 3.3 (Simmons): Za lačne jedce z zaprtimi množicami želja obstaja poštena delitev torte brez zavisti, t.j. obstaja razrez, pri katerem daje vsaka oseba prednost drugemu kosu.
Dokaz:
Dokaz je povzet po [3].

Najprej si poglejmo primer $n = 3$.
Torto dolžine 1 razrežemo z dvema nožema na tri kose. Te razdelimo med 3 osebe, imenovane Anton, Barbara in Cvetko.
Prostor vseh razrezov lahko zapišemo kot množico:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ \wedge \ \forall i: 0 \leq x_i \leq 1\},$$

kjer z x_i označimo velikost i-tega kosa. Prostor S je torej trikotnik, ki ga dobimo s presekom ravnine $x + y + z = 1$ in prvega oktanta v $\mathbb{R}^3$.
Dokazati moramo, da v S obstaja razrez, pri katerem si vsaka oseba izbere drug kos.
Najprej trianguliramo S z večkratno baricentrično subdivizijo. Vsako oglišče triangulacije predstavlja drugačen razrez torte.
Ker mora v poštenem razrezu vsaka oseba izbrati drugačen kos, moramo pri vsakem razrezu določiti osebo, ki bo lahko izbirala svoj najljubši kos. Vsakemu oglišču triangulacije torej dodelimo lastnika (Antona, Barbaro ali Cvetka) oz. pomožno oznako A, B ali C. Pri tem moramo paziti, da so oglišča vsakega elementarnega trikotnika različno označena (Slika 3.5).



Slika 3.5: Primer triangulacije trikotnika z drugo baricentrično subdivizijo in pripadajoča pomožna označitev.

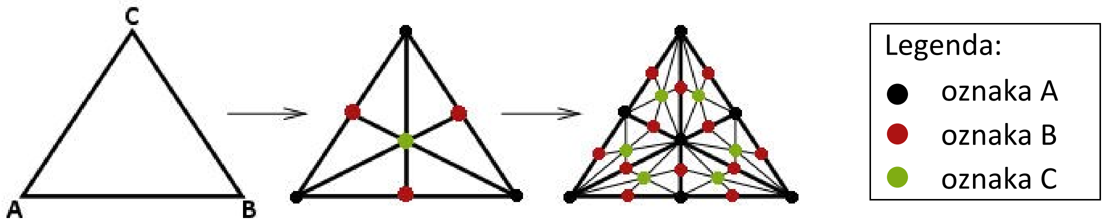
V vsakem oglišču triangulacije vprašamo lastnika, kateri kos (prvi, drugi ali tretji) mu je pri razrezu, ki pripada temu oglišču, najljubši. Glede na lastnikov odgovor oglišču dodelimo novo, številčno oznako (1, 2 ali 3).
Dokazati moramo, da obstaja elementarni trikotnik, kjer vsak izmed jedcev izbere drugi kos. Iščemo torej polno označeni elementarni trikotnik. Slednji obstaja, če za S velja Spernerjeva lema oz. je označitev oglišč triangulacije s številčnimi oznakami Spernerjeva.

V točki $(1, 0, 0) \in S$ je prvi kos dejansko celotna torta, drugega in tretjega kosa pa ni (oz. sta "prazna"). Zaradi predpostavke o lačnih jedcih bo lastnik oglišča $(1, 0, 0)$ vedno izbral prvi kos, zato bo to oglišče zmeraj označeno z 1. Podobno velja za oglišče $(0, 1, 0) \in S$, ki bo označeno z 2, in oglišče $(0, 0, 1) \in S$, ki bo označeno s 3. Oglišča triangulacije, ki ležijo na stranici S med $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, 0)$, imajo tretjo koordinato enako 0, t.j. tretji kos torte je prazen. Tega kosa ne izbere nihče, zato omenjena oglišča prejmejo oznako 1 ali 2 oz. oznako, ki ustreza enemu izmed krajišč stranice. Podobno velja za preostali dve stranici. Opisano dodeljevanje oznak torej zadošča pogojem za Spernerjevo označitev, zato velja za S Spernerjeva lema. V triangulaciji torej obstaja elementarni simpleks z oglišči, označenimi z oznakami 1, 2 in 3. Poleg tega ima vsako oglišče drugega lastnika. Oglišča polno označenega elementarnega simpleksa tako predstavljajo tri podobne razreze, kjer Anton, Barbara in Cvetko izberejo različne kose.

Če želimo natančnejši razrez, lahko premer simpleksa poljubno zmanjšamo z več iteracijami baricentrične subdivizije.

Tako dobimo zaporedje razrezov in zaporedje elementarnih simpleksov z lastnostjo, da oglišča ustrezajo trem čedalje bolj podobnim razrezom, kjer vsak od jedcev izbere drug kos torte. V limiti se končni elementarni trikotnik spremeni v eno samo točko. Namesto treh podobnih razrezov je končni rezultat en sam razrez, v katerem Anton, Barbara in Cvetko izberejo različne kose.

Oglejmo si še dokaz za splošen n in ob tem opišimo postopek za dodeljevanje oznak pomožne označitve m-te baricentrične subdivizije. Predpostavimo, da smo ogliščem iz $(m-1)$-te iteracije dodelili enakega lastnika oz. jih označili z isto pomožno oznako A. Oglišča m-te baricentrične subdivizije so baricentri elementarnih simpleksov iz predhodne iteracije in baricentri njihovih lic. Oglišča, ki so baricentri lic iste dimenzije, tvorijo svoj razred. Oglišča iz razreda, ki ustreza dimenziji 0, že imajo oznako A. Preostalih razredov je toliko, kolikor je preostalih dimenzij lic v n-simpleksu, torej $n-1$. Vsakemu izmed njih dodelimo eno izmed preostalih pomožnih oznak in s tem ustreznega lastnika. Paziti moramo, da so razredi različno označeni. Na tak način so vsi elementarni simpleksi polno označeni s pomožnimi oznakami. Primer pomožnih označitev za prvi dve baricentrični subdiviziji 2-simpleksa z barvami je prikazan na Sliki 3.6.



Slika 3.6: Pomožna označitev za 0., 1. in 2. iteracijo baricentrične subdivizije. Črne pike označujejo točke, nastale v predhodni iteraciji, rdeče pike so baricentri 1-simpleksov, zelene pike pa baricentri 2-simpleksov.

Dodeljevanje glavnih oznak in iskanje rešitve poteka enako v primeru $n = 3$.
Iz Leme 3.2 sledi, da meri premer m-kratne baricentrične subdivizije n-simpleksa s premerom δ največ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \delta$. V limiti ($m \to \infty$) se premer simpleksa približuje 0 oz. se elementarni n-simpleks spremeni v točko. Rezultat je en sam razrez, kjer vsaka izmed $n + 1$ oseb izbere drug kos torte. $\square$

Opomba: Za opis postopka smo uporabili večkratno baricentrično subdivizijo, vendar je mogoče uporabiti tudi druga zaporedja subdivizije. Paziti moramo le, da je pri razdelitvi osnovnega simpleksa na elementarne vsak izmed njih polno označen s pomožnimi oznakami.

3.2.2. Scarfov algoritem za iskanje ekonomskega ravnovesja

Scarf je svoj algoritem [4] razvil za iskanje ekonomskega ravnovesja, vendar ga lahko uporabimo tudi za reševanje drugih problemov poštenih delitev, saj se povezava z ekonomijo pojavi le pri označitvi točk.

Algoritem uporablja Hansen-Kuhnovo subdivizijo in, za razliko od Simmonsove metode, uporablja vrednotenjsko matriko. Slednjo igralci oblikujejo že pred začetkom iskanja zadovoljivega razreza, namesto da bi jih na vsakem koraku spraševali po njihovem najljubšem kosu torte.

Potrebovali bomo formalno opredelitev problema rezanja torte in poštene delitve. Problem rezanja torte je trojica $< I, A, V >$, pri čemer je

- $I = \{i_1,\ i_2, \dots, i_n\}$ skupina igralcev (jedcev),
- $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_m\}$, $m \geq n$, množica objektov (kosov torte),
- $V = [V_{i,a}]_{i \in I, a \in A}$ vrednotenjska matrika, kjer $V_{i,a} \in \mathbb{R}^+$ označuje vrednost, ki jo igralcu i predstavlja objekt a.

Pri reševanju problema rezanja torte vsak izmed igralcev predlaga razrez celotne torte, ki se mu zdi pošten. Vsak predlog predstavlja vrstico vrednotenjske matrike V.

Tako kot v Simmonsovem postopku lahko tudi tu velikost kosov torte predstavimo z relativnim deležem. Potem je prostor vseh razrezov ponovno enak enotskemu simpleksu S,

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \ \wedge \ x_i \geq 0\} ,$$

kjer x_i označuje velikost i-tega kosa.

Scarfov algoritem uporablja za razdelitev simpleksa S na elementarne simplekse Hansen-Kuhnovo subdivizijo in postopek zamenjave oglišč. Vendar nam ni potrebno predhodno izračunati celotne triangulacije, zadošča že, da poznamo en elementarni simpleks. Algoritem se namreč začne z natančno določenim začetnim elementarnim simpleksom in pripadajočimi oznakami, triangulacija pa poteka sočasno s prehajanjem skozi elementarne simplekse in iskanjem polno označenega.

Oglišča Hansen-Kuhnove subdivizije lahko zapišemo v obliki

$$v_j = (\frac{x_{j,1}}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D}),$$

pri čemer $D \in \mathbb{Z}^+$ določa velikost triangulacije in so $x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n+1}$ nenegativna cela števila, katerih vsota je enaka D.

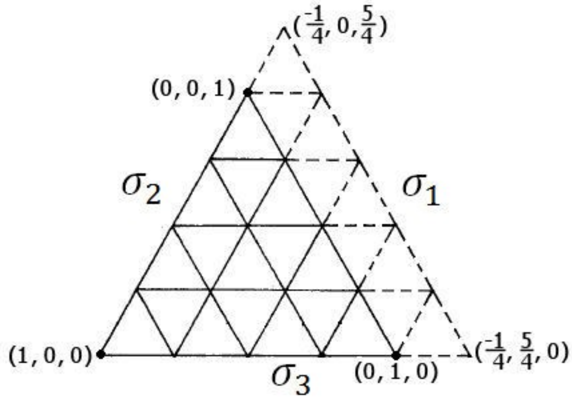
Ker vsako oglišče $v_j = (\frac{x_{j,1}}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D})$ subdivizije predstavlja točno določen razrez torte na deleže, lahko za vsakega igralca i definiramo funkcijo koristnosti $u_i: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u_i(a, x_{j,a}) = x_{j,a} - V_{i,a} \ . \tag{8}$$

Nenegativna vrednost funkcije pomeni, da igralec i prejme vsaj željeni kos a, medtem ko pri negativni vrednosti igralec prejme manj, kot je želel.

Najprej enotskemu simpleksu dodamo en sloj elementarnih simpleksov, tako kot je prikazano na Sliki 3.7 za 2-simpleks. Robove, ki se začnejo v oglišču $(1, 0, \dots, 0)$ podaljšamo za $\frac{1}{D}$. Nastane razširjeni simpleks z glavnimi lici $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$:

- oglišča glavnega lica σ_1 imajo prvo koordinato enako $-\frac{1}{D}$, izmed preostalih koordinat pa je $n-2$ ničelnih in ena pozitivna ter enaka $1+\frac{1}{D}$
- oglišča glavnih lic σ_i, $2 \leq i \leq n$, imajo i-to koordinato enako 0



Slika 3.7: Primer razširitve Hansen-Kuhnove subdivizije enotskega simpleksa ($D = 4$).

Začetni elementarni simpleks, s katerim začnemo iskanje poštene razdelitve, se nahaja v dodanem območju. Naj bo v_0 poljubno oglišče oblike $v_0 = (0, \frac{x_{0,2}}{D}, \dots, \frac{x_{0,n}}{D})$. Potem koordinate oglišč začetnega elementarnega simpleksa zapišemo v stolpce matrike $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$X = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ x_{0,2} & & x_{0,2} & x_{0,2}+1 & x_{0,2} \\ x_{0,3} & & x_{0,3}+1 & x_{0,3} & x_{0,3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{0,n}+1 & & x_{0,n} & x_{0,n} & x_{0,n} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Za označitev oglišč triangulacije razširjenega simpleksa uporabljamo naslednje pravilo:

- vsakemu oglišču oblike $v_j = (-\frac{1}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D})$ dodelimo oznako, enako indeksu a prve koordinate $x_{j,a}$, za katero velja $x_{j,a} > x_{0,a}$,
- oglišča v_j, ki imajo vsaj eno koordinato enako 0, prejmejo oznako prve neničelne koordinate,
- preostala oglišča $v_j = (\frac{x_{j,1}}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D})$ označimo z oznako, enako indeksu a prve koordinate $x_{j,a}$, pri kateri funkcija $u_i(a, x_{j,a})$ zavzame maksimum, t.j. oznako prvega kosa torte, pri katerem je funkcija koristnosti najvišja.

Stolpce začetne matrike X torej zaporedno označimo z $n, n-1, \dots, 2, 2$.

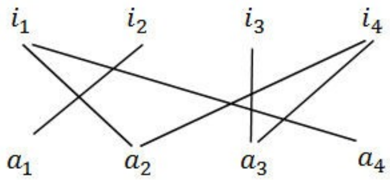
Sosednji elementarni simpleks dobimo z zamenjavo enega izmed dveh stolpcev, ki imata podvojeno oznako. Če pri začetnem elemetarnem simpleksu zamenjamo oglišče iz zadnjega stolpca matrike, se novi elementarni simpleks nahaja izven razširjenega S. Prva zamenjava, ki se izvede v algoritmu, mora torej biti zamenjava tistega stolpca, ki nosi enako oznako kot zadnji stolpec. Novo oglišče izračunamo po enačbi (5), dodelimu mu tudi oznako glede na označevalno pravilo.

Če je dobljeni simpleks polno označen oz. imajo vsi stolpci matrike različne oznake, se algoritem zaključi. Sicer sta v matriki X natanko dva stolpca, ki sta enako označena. Ponovimo postopek menjave stolpca. Pri zamenjavi upoštevamo princip FIFO (ang. *First-In, First-out*) – zamenjamo tisto oglišče, ki se pojavi na zgodnjejšem koraku algoritma. Izračunamo še oznako novega oglišča.

Algoritem se konča, ko so v matriki X vsi stolpci različno označeni oz. je trenutni elementarni simpleks polno označen. Rezultat je n podobnih razrezov torte, v katerih j-ti relativni delež predstavlja velikost j-tega kosa torte. Pri dovolj majhni delitvi je vsaka izmed dobljenih razdelitev dober približek natančnemu rezultatu. Tudi pri tem algoritmu se v limiti polno označeni elementarni simpleks spremeni v točko – rezultat postane en natančen razrez torte.

Vsakemu kosu torte moramo poiskati še ustreznega lastnika. Naj bo končna velikost kosa a enaka p_a. Igralcu i se dodeli kos a, če za vsak kos a' velja $u_i(a, p_a) \geq u_i(a', p_{a'})$.

Če za katerega izmed kosov obstaja več možnih lastnikov ali je vsaj en igralec neodločen med več kosi, lahko ustrezne dodelitev kosov dobimo s pomočjo dvodelnega grafa zahtev [6]. Vozlišča grafa predstavljata množici I in A. Med $i \in I$ in $a \in A$ obstaja povezava, če velja $u_i(a, p_a) \geq u_i(a', p_{a'})$ za vsak $a' \in A$. Primer dvodelnega grafa zahtev je prikazan na Sliki 3.8.



Slika 3.8: Dvodelni graf zahtev. Osebi i_1 je vseeno, ali prejme kos a_2 ali a_4. Jedec i_2 si želi le kosa a_1, igralec i_3 ima najraje kos a_3. Oseba i_4 je neodločena med kosoma a_2 ali a_3.

Najprej se dodeli torto jedcem $j \in J, J \subseteq I$, ki želijo le po en kos ($deg(j) = 1$). Za vsakega igralca j se iz grafa odstrani povezavo, ki se začne v njegovem vozlišču, in povezave, ki se stekajo v kos, ki ga j želi. Sledi dodeljevanje kosov $b \in B, B \subseteq A$, za katere je možen le en lastnik ($deg(b) = 1$). Za vsak takšen kos b se iz grafa odstani povezavo, ki se začne v vozlišču kosa b, in povezave, ki se stekajo v vozlišče njegovega lastnika. Postopek ponavljamo, dokler opisani vrsti povezav obstajata. Če ostane graf brez povezav, je problem rezanja torte rešen.

Sicer ostanejo povezave, izmed katerih lahko naključno izberemo po eno ujemanje lastnika in njegovega kosa, dokler v grafu ne zmanjka povezav.

3.3 Dodeljevanje sobe – delitev najemnine

Opis problema: n ljudi želi najeti hišo z n spalnicami za natančno določeno ceno. Vsaka izmed oseb ima lahko drugačne želje – nekateri želijo veliko sobo, drugi imajo raje sobo z razgledom, tretji dajejo prednost sobam z velikimi omarami,… Kako naj si razdelijo spalnice in plačilo najemnine, da bodo vsi zadovoljni s prejeto sobo in s svojim deležem najemnine ter se nihče ne bo čutil oškodovanega?

Izrek 3.4: V hišo z n spalnicami se želi vseliti n oseb. Odločiti se morajo, kdo bo dobil katero izmed n spalnic in kolikšen delež najemnine bo zanjo plačal. Predpostavimo:

- Dobra hiša: pri vsaki možni razdelitvi najemnine se vsakemu izmed sostanovalcev zdi vsaj ena soba sprejemljiva.
- Skopuški prebivalci: vsak raje izbere brezplačno spalnico kot katerokoli drugo.
- Zaprte množice želja: če oseba daje prednost spalnici v konvergentnem zaporedju razporeditev, potem je to njena priljubljena soba tudi v limiti.

Potem obstaja takšna razdelitev najemnine med sostanovalce, da vsak izmed njih izbere drugo spalnico.

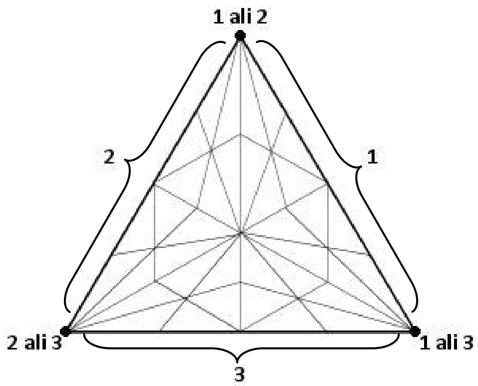
3.3.1. Sujev pristop: Rezanje torte s preobratom

Prva metoda za reševanje problema je le prilagoditev rezanja torte [3]. Postopek iskanja ustrezne rešitve je namreč skoraj identičen kot pri zveznemu problemu poštenih delitev.

Med n oseb delimo n sob, označenih z 1, 2, …, n. Najemnino izrazimo z relativnimi deleži. Skupna najemnina je torej enaka 1, ceno i-te sobe označimo z x_i. Ponovno velja, da je $0 \leq x_i \leq 1$ in $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Prostor S vseh možnih razdelitev najemnine predstavlja $(n-1)$-simpleks v $\mathbb{R}^n$.

Tako kot pri problemu rezanja torte tudi tukaj simpleks S najprej trianguliramo, nato pa ogliščem triangulacije dodelimo lastnike in tako pridobimo pomožne oznake. Lastnike ponovno sprašujemo, katero sobo bi izbrali pri danih cenah. Glede na njihove odgovore določimo glavne oznake oglišč.

V tem delu se začne postopek razlikovati. Označitev, ki jo dobimo z odgovori sostanovalcev, ni Spernerjeva. Oglišča vzdolž $(n-k-1)$-dimenzionalnega lica imajo k ničelnih koordinat. V vsakem izmed teh oglišč je razdelitev najemnine takšna, da je k spalnic zastonj. Zaradi predpostavke skopuških prebivalcev sostanovalci vedno izberejo eno izmed teh brezplačnih k sob. Primer nastale označitve je prikazan na Sliki 3.9.



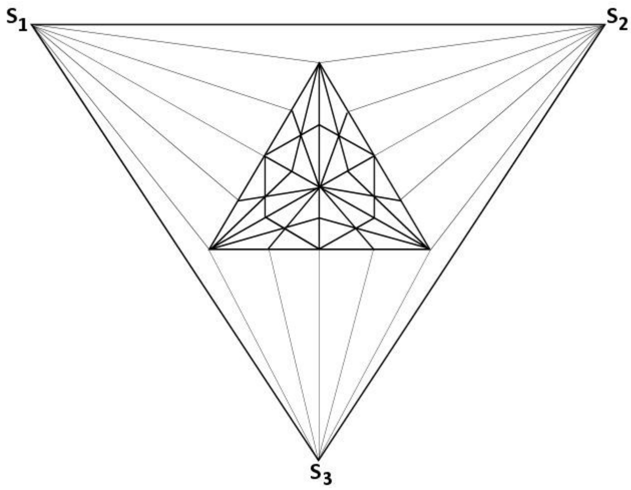
Slika 3.9: Dualna označitev pri dodeljevanju sob – razdelitvi najemnine za 3 osebe.

Kljub drugačni označitvi lahko v triangulaciji najdemo polno označen elementarni simpleks. Obstoj polno označenega elementarnega zagotavlja Lema 3.5, povzeta po Scarfu [4].

Lema 3.5 (dualna oblika Spernerjeve leme): Naj bo S trianguliran n-simpleks in v_i oglišča triangulacije. Oglišča v_i, ki ležijo v notrajnosti S, označimo s poljubnim številom $1, 2, \ldots, n+1$. Vsakemu oglišču v_i, ki leži na glavnem licu simpleksa S, dodelimo oznako, ki je enaka indeksu ene izmed ničelnih koordinat tega oglišča. Potem obstaja v triangulaciji vsaj en polno označen elementarni simpleks.

Dokaz:

Trianguliran n-simpleks S vpnemo v večji n-simpleks S' z oglišči s_1, …, s_{n+1}, tako da vsako oglišče v_i iz triangulacije simpleksa S, ki ima i-to koorindato enako 0, povežemo z ogliščem s_i iz simpleksa S' (Slika 3.10). Vsako oglišče s_i označimo z i. Dobljena označitev simpleksa S' je Spernerjeva, torej obstaja v S' polno označeni simpleks.



Slika 3.10: Vpenjanje n-simpleksa S v večji n-simpleks S'.

Dokazati moramo, da so vse točke polno označenega elementarnega simpleksa vsebovane v množici točk simpleksa S. Drugače povedano, nobeno izmed oglišč s_1, …, s_{n+1} ne sme biti oglišče polno označenega elementarnega simpleksa. Dokazujemo torej, da noben izmed elementarnih simpleksov, nastalih pri vpenjanju v simpleks S', ni polno označen.
Najprej predpostavimo nasprotno. Naj polno označeni elementarni simpleks vsebuje t oglišč izmed s_1, …, s_{n+1} in naj oznake teh t oglišč tvorijo množico T. Polno označeni simpleks vsebuje poleg t oglišč oblike s_i še $n - t + 1$ oglišč v_i, ki ležijo na glavnih licih simpleksa S. Po lemi morajo ta oglišča prejeti oznako, enaku indeksu ničelne koordinate. Ker so povezana z oglišči s_i, so indeksi njihovih ničelnih koordinat ravno elementi T. Torej imata vsaj dve oglišči iskanega elementarnega simpleksa enako oznako, kar pa je v protislovju s samo definicijo polno označenega elementarnega simpleksa. Ker smo ovrgli našo predpostavki, smo uspešno dokazali Lemo 3.5. ☐

Polno označni elementarni simpleks obstaja tudi pri dualni označitvi, zato ga lahko poiščemo s sprehajanjem skozi sobe oz. na enak način kot pri simpleksih, označenih s Spernerjevim označevanjem.

V splošnem predstavlja polno označeni simpleks n podobnih delitev, kjer sostanovalci izberejo različne sobe in so zadovoljni s svojim deležom najemnine. V limiti se končni elementarni n-simpleks spremeni v eno samo točko in je rezultat natančna razdelitev najemnine med n sostanovalcev, ki prejmejo različne sobe.

3.3.2. Scarfov algoritem za izračun ekonomskega ravnovesja

Scarfov algoritema za izračun ekonomskega ravnovesja lahko prilagodimo za reševanje problema dodeljevanja sob – delitve najemnine. Postopek je v osnovi enak tistemu iz podpoglavja 3.2.2, zato je pregled tokratnega algoritma manj podroben, k Prilogam pa je priložen praktičen primer iskanja rešitve. Natančnejšo predstavitev najdemo v Scarfu [4].

Problem dodeljevanja sob – delitve najemnine predstavimo s četverico $< I, A, V, p >$, pri čemer je

- $I = \{i_1,\ i_2, \dots, i_n\}$ skupina igralcev (sostanovalcev),
- $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_m\}$ množica objektov (sob),
- $V = [V_{i,a}]_{i \in I, a \in A}$ vrednotenjska matrika, kjer $V_{i,a} \in \mathbb{R}^+$ označuje vrednost, ki jo igralcu i predstavlja objekt a,
- $p \in \mathbb{R}^+$ denarna vsota, ki jo morajo igralci plačati (najemnina) .

Za reševanje problema dodelitve sob - razdelitve najemnine lahko predpostavimo, da sta množici I in A enako močni. Denarna vsota p je enaka skupni najemnini, ki jo morajo sostanovalci plačati. Vrednost $V_{i,a}$ v vrednotenjski matriki predstavlja denarno vsoto najemnine p, ki jo je igralec i pripravljen plačati za sobo a.

Prostor vseh razdelitev sob in najemnine p med n sostanovalcev je podan z $(n-1)$-simpleksom

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = p\ \wedge\ 0 \le x_i \le p\}\,.$$

Če najemnino izrazimo z relativnim deležem, se vrednost p spremeni v 1 in S postane enotski simpleks. Z relativnim deležem izrazimo tudi vrednosti v vrednotenjski matriki.

Algoritem ponovno uporablja Hansen-Kuhnovo subdivizijo, vendar nam tokrat simpleksa ni treba razširiti.

Oglišča triangulacije zapišemo v obliki

$$v_j = (\tfrac{x_{j,1}}{D}, \tfrac{x_{j,2}}{D}, \dots, \tfrac{x_{j,n}}{D}),$$

pri čemer $D \in \mathbb{Z}^+$ določa velikost triangulacije in so $x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n+1}$ nenegativna cela števila, katerih vsota je enaka D.

Vsako oglišče v_j subdivizije predstavlja točno določeno razdelitev najemnine na deleže, ki jih je potrebno plačati za posamezno sobo, zato lahko za vsakega igralca i definiramo funkcijo koristnosti $u_i\colon A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u_i(a, x_{j,a}) = V_{i,a} - x_{j,a}\,. \tag{10}$$

Pozitivna vrednost $u_i(a, x_{j,a})$ pomeni, da igralec plača za sobo a manjši znesek, kot ga je določil na začetku. Vrednost funkcije, manjša od 0, pomeni, da bi moral za sobo plačati več, kot želi.

Imamo novo pravilo za označitev oglišč triangulacije simpleksa S:

- vsakemu oglišču v_j, ki leži na glavnem licu S, dodelimo oznako, ki je enaka indeksu prve ničelne koordinate oglišča,
- preostala oglišča $v_j = (\frac{x_{j,1}}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D})$ označimo z zaporednim številom sobe, pri kateri je funkcija koristnosti najvišja oz. s prvim številom iz množice indeksov a, kjer zavzame funkcija $u_i(a, x_{j,a})$ maksimum.

Naj bo $d = D - (n-1) + 1$. Potem so koordinate točk začetnega elementarnega simpleksa podane z matriko $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$X = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} d & d+1 & d+1 & \cdots & d+1 & d \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

$$\text{oznake:} \quad n \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1 \quad n-1$$

V začetnem simpleksu je prvih $n-2$ stolpcev različno označenih, v zadnjih dveh se ponovi oznaka $n-1$.

Sosednji elementarni simpleks dobimo z zamenjavo enega izmed dveh stolpcev, ki imata podvojeno oznako. Če pri začetnem elemetarnem simpleksu zamenjamo oglišče iz zadnjega stolpca, se novi elementarni simpleks nahaja izven S. Prva zamenjava, ki se izvede v algoritmu, mora torej biti zamenjava oglišča iz predzadnjega, $(n-1)$-tega stolpca. Izračun oglišč sosednjega elementarnega simpleksa ostaja nespremenjen: novo oglišče izračunamo po enačbi (5) in mu nato dodelimo oznako glede na označevalno pravilo.

Če je dobljeni simpleks polno označen oz. imajo vsi stolpci matrike različne oznake, se algoritem zaključi. Sicer ponovimo postopek menjave stolpca in izračuna novih oznak.

Izvajanje algoritma se konča, ko so v matriki X vsi stolpci različno označeni oz. je trenutni elementarni simpleks polno označen. Vrednosti v matriki pomnožimo s p, da relativne deleže spremenimo nazaj v denarne vsote. Rezultat je n podobnih razdelitev najemnin, v katerih j-ta vrednost predstavlja del najemnine, ki ga je potrebno plačati za j-to sobo. Pri dovolj majhni delitvi je vsaka izmed dobljenih razdelitev dober približek natančnemu rezultatu. V limiti se polno označeni elementarni simpleks spremeni v točko – rezultat postane ena natančna razdelitev najemnine.

Ker algoritem ne uporablja pomožnega označevanja, moramo s pomočjo dvodelnih grafov poiskati še ustreznega lastnika za posamezno sobo. Postopek je enak tistemu iz podpoglavja 3.2.2.

Praktičen primer reševanja problema dodeljevanja sobe – delitve najemnine je dodan v Prilogo I.

Poglavje 4: Implementacija

V poglavju 4 je opisana razvita programska oprema. Izdelali smo aplikacijo z grafičnim uporabniškim vmesnikom, namenjeno iskanju rešitve zveznih in mešanih problemov poštenih delitev. Za implementacijo smo izbrali Simmonsovo metodo rezanja torte [3] in prilagojeno Scarfovo metodo za izračun ekonomskega ravnovesja [4], s katero lahko poiščemo rešitev problema dodeljevanja sob – delitve najemnine. Pri implementaciji Simmonsove metode smo uporabili baricentrično subdivizijo, vendar se je ta izkazala za neprimerno pri problemih, v katerih sodeluje večja skupina oseb, in pri problemih, kjer je zaželjena natančna rešitev. Celotno metodo smo nato zamenjali s Scarfovim pristopom [4], vendar smo namesto Scarfovih vrednostenjskih matrik ohranili sprotno izbiro igralcev, ki je del Simmonsove metode. Za implementacijo metod in izdelavo grafičnega uporabniškega vmesnika smo uporabili programsko okolje MATLAB [12].

4.1 Scarfov algoritem s sprotnim spraševanjem igralcev

V izdelani aplikaciji smo za reševanje problema rezanja torte uporabili prilagojeni Scarfov algoritem iz podpoglavja 3.2.2, kjer smo namesto valuacijske matrike, določene pred začetkom izvajanja algoritma, uporablili sprotno spraševanje igralcev.

Vsakega izmed stolpcev matrike X iz enačbe (9) najprej označimo s pomožnimi oznakami oz. imeni igralcev. Vsakemu igralcu dodelimo lastništvo nad natanko enim stolpcem matrike. Čeprav se med izvajanjem algoritma vrednosti v stolpcih spreminjajo, ostajajo pomožne oznake nespremenjene (npr. Antonu vedno pripada prvi stolpec, Barbari drugi, Cvetko si lasti tretjega,…).

Za oglišča oblike $v_j = (-\frac{1}{D}, \frac{x_{j,2}}{D}, \dots, \frac{x_{j,n}}{D})$ in oglišča glavnih lic enotskega simpleksa ostane označevalno pravilo nespremenjeno, zato označimo stolpce začetne matrike X enako kot pri Scarfovemu algoritmu z vrednotenjskimi matrikami.

Označevalno pravilo se spremeni za oglišča iz notranjosti enotskega simpleksa, saj oznake zanje poiščemo s sprotnim spraševanjem igralcev. Ko na vsakem koraku algoritma zamenjamo en stolpec, nove vrednosti v stolpcu predstavljajo nov razrez torte. Lastnik zamenjanega stolpca določi, kateri izmed kosov v novi razdelitvi torte mu je najljubši. Zaporedna številka kosa je nova oznaka zamenjanega stolpca.

Ker algoritem tokrat uporablja pomožno označevanje, lahko končni rezultat preberemo kar iz matrike X in je kreiranje dvodelnega grafa zahtev povsem odveč.

4.2 Aplikacija

Na začetni strani aplikacije vidimo kratek opis in primere zveznih in mešanih problemov poštenih delitev (Slika 4.1).

Slika 4.1: Začetna stran aplikacije.

S klikom na gumb "Primer" nadaljujemo na vnosno stran za rezanje torte (zvezni problem poštenih delitev) ali dodeljevanje sob – delitev najemnine (mešani problem). Pri rezanju torte vnesemo le število jedcev, med katere delimo torto, in njihova imena. Reševanje problema dodeljevanja sob – delitve najemnine zahteva več podatkov. Poleg števila sostanovalcev in njihovih imen, moramo navesti tudi skupno najemnino in izpolniti seznam sob. Za vsakega izmed sostanovalcev moramo zapisati najvišji denarni znesek, ki ga je pripravljen plačati za posamezno sobo. Ko so vsi obrazci pravilno izpolnjeni, s klikom na gumb "Izračun" začemo postopek iskanja rešitve problema.

Medtem ko pri dodeljevanju sob – delitvi najemnine le počakamo na izpis rezultatov, moramo pri rezanju torte sodelovati z igralci, ki odgovarjajo na vprašanja. Vprašanje "Kateri kos bi najraje izbrali pri dani razdelitvi torte?" vedno zastavimo eni sami osebi, ki izbere najljubši odgovor. Da bi bila izbira odgovora lažja, je dodana še vizualizacija razdelitve torte (Slika 4.2).

Slika 4.2: Zastavljeno vprašanje in prikaz razdelitve torte pri reševanju problema rezanje torte.

Ko se izbrani algoritem zaključi in najde rešitev problema poštene delitve, se na zaslon izpišejo rezultati (Slika 4.3). Pri najemnini je dopustna napaka 0.10€, pri rezanju torte pa 10%.

Slika 4.3: Izpis rešitve problema rezanja torte.

Poglavje 5: Rezultati

Poglavje 5 je namenjeno analizi delovanja uporabljenih algoritmov. V primerjavo smo vključili Simmonsovo metodo za rezanje torte, Sujev pristop k reševanju problema dodeljevanja sob – delitve najemnine, oba prilagojena Scarfova algoritma z valuacijskimi matrikami in prilagojen Scarfov algoritem za rezanje torte s sprotnim spraševanjem igralcev. Analiza metod Simmonsa in Suja velja, le če obe metodi uporabljata baricentrično subdivizijo.

5.1 Izpolnjeni kriteriji poštenosti

Pri določanju izpolnjenih kriterijev poštenosti predpostavimo, da se igralci ne zavedajo želja drugih ali zanje vedo in jih pri svojem odločanju povsem zanemarijo, t.j. da igrajo pošteno.

5.1.1. Algoritmi za reševanje problema rezanja torte

Pri Simmonsovi metodi za reševanje problema rezanja torte lahko igralci na vsakem koraku algoritma izbirajo svoj najljubši kos. Algoritem se konča, ko vsak izmed igralcev izbere drug kos torte. Ker nihče ne želi tujega kosa bolj kot svojega, Simmonsova metoda zadošča kriterijema sorazmerne delitve in delitve brez zavisti.

Pri prilagojenem Scarfovem algoritmu z valuacijskimi matrikami so doseženi kriteriji poštenosti odvisni od velikosti subdivizije. Pri prenizki vrednosti D oz. pri prevelikih elementarnih simpleksih se lahko zgodi, da doseže funkcija koristnosti večih igralcev svojo najvišjo vrednost pri istem kosu torte. Tako vsaj eden izmed igralcev prejme kos, ki je po njegovem mnenju pošten, vendar ni njegova najljubša izbira. V tem primeru algoritem zadošča kriteriju sorazmerne delitve. Sicer metoda izpolnjuje še kriterij delitve brez zavisti. Prilagojen Scarfov algoritem z valuacijskimi matrikami je tudi pareto optimalen.

Za prilagojen Scarfov algoritem s sprotnim spraševanjem igralcev velja enako kot za Simmonsovo metodo. Poleg tega je algoritem pareto optimalen.

5.1.2. Algoritmi za reševanje problema dodeljevanja sob – delitve najemnine

Sujev pristop je izpeljan iz Simmonsove metode, zato zadošča enakima kriterijema (kriterij sorazmerne delitve in kriterij delitve brez zavisti).

Za prilagojen Scarfov algoritem z valuacijskimi matrikami velja pri reševanju problema dodeljevanja sob – delitve najemnine enako kot pri reševanju problema rezanja torte. Ob prenizki vrednosti D algoritem zadošča kriteriju sorazmerne delitve, sicer pa še kriteriju delitve brez zavisti. Algoritem je vedno pareto optimalen.

5.2 Zahtevnost algoritmov

Časovno in prostorsko zahtevnost izbranih algoritmov določajo uporabljene triangulacije.

Pri Simonsovi in Sujevi metodi smo uporabili baricentrično subdivizijo. Prostorska zahtevnost je omejena s številom elementarnih simpleksov, ki nastanejo pri subdiviziji simpleksa dimenzije $n-1$. Enaka je $O((n!)^i)$, pri čemer je i število iteracij baricentrične subdivizije. V obeh algoritmih je časovno najbolj potratna ravno triangulacija simpleksa z baricentrično subdivizijo. Pri vnaprej dodeljenem prostoru za hranjenje elementarnih simpleksov je čas za izvedbo ene iteracije baricentrične subdivizije podan z rekurzivno enačbo in robnim pogojem

$$\begin{aligned} T(1) &= O(1) \\ T(n) &= O(1) + n \cdot T(n-1) \end{aligned} \tag{12}$$

V rekurzivni enačbi (11) se hitra operacija nanaša na izračun baricentra trenutnega simpleksa in rekurzivni klic na triangulacijo n glavnih lic. Skupno znaša časovna zahtevnost ene iteracije $O(n!)$, časovna zahtevnost i iteracij pa $O((n!)^i)$.

V vseh različicah Scarfovega algoritma smo simpleks triangulirali s Hansen-Kuhnovo subdivizijo. Prostorska zahtevnost je omejena z velikostjo matrike X iz (9) oz. (11), torej je enaka $O(n^2)$. Najvišja časovna zahtevnost je dosežena, če se med izvajanjem algoritma v matriki X pojavi vsak elementarni simpleks. Vseh elementarnih simpleksov je D^n, pri čemer je n dimenzija simpleksa in D velikost triangulacije oz. število elementarnih simpleksov vzdolž poljubnega lica originalnega simpleksa. Časovna zahtevnost poljubne različice Scarfovega algoritma je torej $O(D^n)$.

5.3 Prednosti in slabosti algoritmov

Glavna prednost različic Scarfovih algoritmov pred Simmonsovo in Sujevo metodo je v njihovi hitrosti izvajanja, majhni porabi računalniškega spomina in visoki natančnosti. Scarfov algoritem hitreje doseže višjo natančnost rezultata. Pri tem nima nikakršnih težav z morebitnim pomanjkanjem spomina, saj na vsakem koraku hrani le en elementarni simpleks, medtem ko je pri metodah z baricentrično subdivizijo potrebno triangulacijo izračunati vnaprej in med izvajanjem algoritmov hraniti vse elementarne simplekse.

Kljub hitrejšemu izvajanju, je Scarfov algoritem še vedno aproksimativen, zato so za doseg dobre aproksimacije limitnega rezultata potrebne višje vrednosti D. Algoritem lahko med izvajanjem prehaja med sosednjimi elementarnimi simpleksi in pri tem naredi veliko "ovinkov", preden najde rešitev.

Tako kot Scarfov algoritem sta tudi Simmonsova in Sujeva metoda aproksimativni. Lahko se zgodi, da doseženi rezultati niso dovolj natančni. Celoten algoritem je potrebno ponoviti z natančnejšimi parametri – z višjo vrednostjo D pri Scarfovem algoritmu in večjem številu iteracij oz. manjšim premerom triangulacije pri Simmonsovi metodi in Sujevem pristopu.

Pri Scarfovem algoritmu je lažje določiti parameter D, ki vodi do željene natančnosti rezultata, saj so elementarni simpleksi skladni. Pri Simmonsovi metodi in Sujevem pristopu je natančnost rešitve odvisna od premera baricentrične subdivizije. Slednji je enak največjemu premeru elementarnih simpleksov, vendar ti niso skladni. Elementarni simpleksi, ki ležijo ob baricentru originalnega simpleksa S, imajo namreč precej manjši premer kot tisti elementarni simpleksi, ki ležijo ob glavnih licih S. Če se rešitev problema nahaja v okolici baricentra S, bi lahko bilo število iteracij baricentrične subdivizije manjše in prihranek na času večji. Zadostno število iteracij pa je nemogoče ugotoviti, saj ni mogoče predvideti, v katerem delu originalnega simpleksa leži rešitev.

Vsi opisani postopki lahko dosežejo kriterije delitve brez zavisti, vendar so različice Scarfovega algoritma tudi pareto optimalne.

Še ena slabost vseh algoritmov je predpostavka, da igralci igrajo povsem pošteno. V resničnosti se pogosto zavedajo želja soigralcev in jih lahko poskušajo izigrati (npr. v ločitvenih poravnavah, razdelitvi dediščine,…).

Prej omenjena slabost je deloma odpravljena z vrednotenjskimi matrikami pri Scarfovih algoritmih iz podpoglavij 3.2.2 in 3.3.2. Vrednotenjsko matriko določimo glede na želje igralcev v fazi inicializacije algoritma, tako da igralci ne morejo spreminjati svojega mnenja med samim izvajanjem in algoritem gotovo najde pošteno rešitev. Pri sprotnem spraševanju lahko igralci prilagajajo svoje odgovore glede na odgovore svojih soigralcev. Predpostavka o zaprtih množicah želja ne drži več, zato dobljena rešitev ni nujno poštena ali pa algoritem rešitve niti ne najde.

Spraševanje igralcev med izvajanjem algoritma pa ima tudi svojo prednost. Če igralci odgovarjajo povsem pošteno, dobljena rešitev gotovo odraža njihove želje oz. upošteva zahteve. Pri vrednotenjskih matrikah se lahko zgodi, da algoritem pri označevanju ne upošteva objekta, ki bi ga igralec i pri dani delitvi izbral, kljub temu da ga je v vrednotenjski matriki slabše ocenil, kot kaže naslednji primer.
Anton, Barbara in Cvetko žeijo najeti stanovanje s tremi spalnicami. Anton je pred začetkom izvajanja algoritma pripravljen plačati za najmanjšo spalnico 300€, za spalnico z razgledom na park 600€ in za spalnico z veliko televizijo 400€. Ob koncu izvajanja algoritma je razdelitev najemnine enaka 270€ za najmanjšo spalnico, 620€ za spalnico z razgledom in 410€ za spalnico s televizijo. Algoritem Antonu določi najmanjšo spalnico, saj ima samo pri tej sobi 30€ prihranka. Pri sprotnem spraševanju bi se Anton lahko odločil za spalnico s televizijo ali spalnico z razgledom, saj nobena ni dosti dražja od njegove prvotne ocene, obe pa ima veliko raje kot najmanjšo sobo.

Poglavje 6: Zaključek

Poštene delitve so zanimiv problem, s katerim se ukvarjajo raziskovalci v matematiki, ekonomiji, računalništvu, politiki, itd., pogosto pa nanj naletimo tudi v vsakdanjem življenju Temu ustreza tudi število postopkov, namenjenih za reševanje problemov poštenih delitev. Čeprav je bilo razvitih že veliko natančnih in aproksimativnih metod za iskanje rešitev, se področje še vedno aktivno razvija in išče čim boljše rešitve za vsakdanje težave. Nekatere izmed metod je mogoče preizkusiti na Splidditu [13], spletni strani, kjer lahko uporabniki poiščejo poštene rešitve vsakodnevnih problemov, kot so npr. razdelitev igrač med otroke, delitev opravil med zaposlene, deljenje ozemlja,…

Pri branju literature nisem zasledila študije, ki bi na istem problemu analizirala in med seboj primerjala več različnih metod za reševanje problemov poštenih delitev. Večina literature se namreč osredotoča na predstavitev enega samega algoritma, kar otežuje odločanje za najbolj ustrezno metodo. Zato sta bili za vsako vrsto poštenih delitev predstavljeni, analizirani in medsebojno primerjani po dve metodi. Opisani postopki so osnovni, vendar nudijo bralcu dober vpogled v samo področje in predstavljajo odskočno desko za nadaljnje raziskovanje.

Kljub številnim obstoječim algoritmom, so le redki na voljo za testiranje. Zaradi tega smo teoretični del diplomske naloge nadgradili z aplikacijo z grafičnim uporabniškim vmesnikom, ki jo je mogoče uporabiti za reševanje zveznih problemov s heterogenimi objekti (npr. rezanje torte) in reševanje mešanih problemov (npr. problem dodeljevanja sob – delitve najemnine).

Idealno bi bilo, če bi vsi algoritmi v celoti upoštevali človeški faktor – socialni in ekonomski status, čustva, prepričanja,… V tem primeru ustreznosti algoritmov ne bi bilo potrebno preverjati, saj bi gotovo dosegali optimalne rešitve. Trenutni algoritmi se poskušajo optimalni rešitvi čim bolj približati z uporabo matematičnih postopkov, ki človeškega faktorja ne morejo povsem zajeti. Rezultati morajo biti zato ovrednoteni, ker se lahko le na ta način ugotovi ustreznost rešitve in uporabnost algoritma. Študije, ki bi proučevale odziv ljudi na izračunano pošteno delitev, so redke. Tudi naša aplikacija ni merila zadovoljstva uporabnikov. Nadgraditev obstoječega programa bi to omogočila, vendar bi bilo v tem primeru aplikacijo bolje razvijati v drugem, primernejšem okolju, kot je MATLAB.

Priloga I: Primer reševanja mešanega problema poštenih delitev

V nadaljevanju bomo prikazali primer reševanja problema dodeljevanja sob – delitve najemnine. Uporabljen je Scarfov algoritem [4].

podatki:

$n = 3$
$p = 6$
$D = 10$
$V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0.6 & 3 & 2.4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$d = D - (n-1) + 1 = 9$

normalizirana vrednotenjska matrika:

$$V' = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{0.6}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2.4}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix}$$

začetni simpleks:

$$X = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} d & d+1 & d \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scarfov algoritem:

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (3) \;\; (2) \;\; (2) \end{array}$$

V prvem stolpcu je shranjena točka v_1, v drugem v_2 in v tretjem v_3.

V prvem koraku se mora zamenjati predzadnji stolpec.

$$\downarrow \quad \hat{v}_2 = v_1 + v_3 - v_2 = \frac{1}{10} \cdot ([9,1,0] + [9,0,1] - [10,0,0]) = \frac{1}{10} \cdot [8,1,1]$$

$$v_2 = \frac{1}{10} \cdot [8,1,1]$$

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (3) \;\; (2) \;\; (2) \end{array}$$

Novi stolpec prejme oznako (2), saj nima ničelnih koordinat in je najvišja vrednost za funkcijo koristi dosežena pri drugi sobi:

$$u_1 = V_1' - v_2 = \left[\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right] - \left[\frac{8}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{7}{15}, \mathbf{\frac{2}{5}}, \frac{1}{15}\right]$$

$$u_2 = V_2' - v_2 = \left[\frac{0.6}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2.4}{6}\right] - \left[\frac{8}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{7}{10}, \mathbf{\frac{2}{5}}, \frac{3}{10}\right]$$

$$u_3 = V_3' - v_2 = \left[\frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right] - \left[\frac{8}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{7}{15}, \frac{7}{30}, \frac{7}{30}\right]$$

$$\downarrow \quad \hat{v}_3 = v_2 + v_1 - v_3 = \frac{1}{10} \cdot ([8,1,1] + [9,0,1] - [9,0,1]) = \frac{1}{10} \cdot [8,2,0]$$

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ (3)\ (2)\ (3) \end{array}$$

$v_3 = \frac{1}{10} \cdot [8,2,0]$

Novi stolpec prejme oznako (3), saj je treja koordinata enaka 0.

$$\downarrow \quad \hat{v}_1 = v_3 + v_2 - v_1 = \frac{1}{10} \cdot ([8,2,0] + [9,0,1] - [8,1,1]) = \frac{1}{10} \cdot [7,2,1]$$

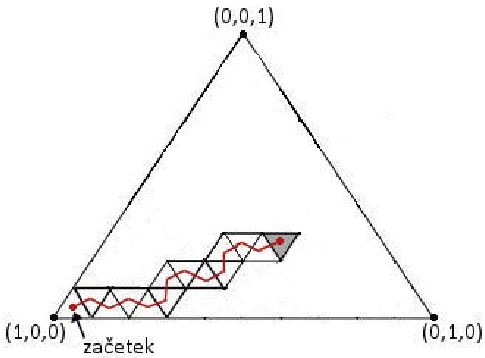
$\ldots$

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ (2)\ (3)\ (1) \end{array}$$

Stolpci so različno označeni, zato se algoritem konča.

Za delitev najemnine se lahko vzame kateregakoli izmed stolpcev, pomnoženega s $p = 6$.

Slika 7.1 prikazuje premikanje po enotskem simpleksu med izvajanjem Scarfovega algoritma.



Slika 7.1: Menjavanje točk in premikanje po enotskem simpleksu med izvajanjem Scarfovega algoritma.

Naj bo končna delitev najemnine enaka $R = \frac{1}{10} \cdot [3,4,3] \cdot 6 = [1.8, 2.4, 1.8]$. Ne glede na dodelitev sob sostanovalcem, bo prva soba stala 1.8, druga 2.4 in tretja 1.8.

Dodeljevanje sob lastnikom:

Najemniki želijo sobe, pri katerih funkcija koristi dosega najvišje vrednosti (obarvane).

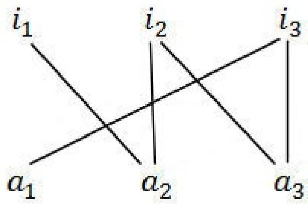
$u_1 = V_1 - R = [2,3,1] - [1.8, 2.4, 1.8] = [0.2, \mathbf{0.6}, 0.2]$

$u_2 = V_2 - R = [0.6,3,2.4] - [1.8, 2.4, 1.8] = [-1.2, \mathbf{0.6}, \mathbf{0.6}]$

$u_3 = V_3 - R = [2,2,2] - [1.8, 2.4, 1.8] = [\mathbf{0.2}, -0.4, \mathbf{0.2}]$

Sostanovalec št.1 želi samo sobo 2, medtem ko je drugi neodločen med drugo in tretjo sobo, tretjemu pa je vseeno, ali prejme prvo ali tretjo spalnico.

Slika 7.2 prikazuje dvodelni graf zahtev, ki odraža želje sostanovalcev.



Slika 7.2: Dvodelni graf za želje sostanovalcev pri $p = [1.8, 2.4, 1.8]$.

Igralec i_1 si želi samo sobo a_2, zato se mu jo dodeli. Iz grafa se odstranijo vse povezave, ki imajo za svoje krajišče i_1 ali a_2. Odstranjeni sta povezavi (i_1, a_2) in (i_2, a_2). Po dodelitvi sobe a_2 in odstranitvi povezav iz grafa ima najemnik i_2 samo še eno željo – sobo a_3, zato se mu jo dodeli. Iz grafa odstranimo povezavi (i_2, a_3) in (i_3, a_3). Za sostanovalca i_3 ostane le še soba a_1, s katero je očitno zadovoljen.

Rešitev problema dodeljevanja sob – delitve najemnine:
Oseba št.1 prejme sobo št.2 za 1.8 denarnih enot (in je pri tem prihranila 0.6 denarnih enot).
Oseba št.2 prejme sobo št.3 za 2.4 denarnih enot (in je pri tem prihranila 0.6 denarnih enot).
Oseba št.3 prejme sobo št.1 za 1.8 denarnih enot (in je pri tem prihranila 0.2 denarnih enot).

Literatura

[1] Y. Aumann, Y.Dombb, "The Efficiency of Fair Division with Connected Pieces", Internet and Network Economics: 6th International Workshop, WINE 2010, Stanford, CA, USA, December 2010, Proceedings, str. 26-37, 2010.

[2] A. Abdulkadiroglu, T. Sönmez in M. U. Ünver, "Room Assignment-Rent Division: A Market Approach", Social Choice and Welfare, št. 22, str. 515-538, 2004.

[3] F. E. Su, "Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division", American Mathematical Monthly, št. 106, str. 930-942, 1999.

[4] H. E. Scarf, "The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition", Handbook of Mathematical Economics, zv. 2, str. 1007-1061, 1982.

[5] J. Huang. On the Sperner Lemma and its Applications. (2004) [Elektronski]. Dostopno: http://jonathan-huang.org/research/old/sperner.pdf. [Poskus dostopa: september 2015].

[6] J. W. Vick, Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology 2nd Edition (Graduate Texts in Mathematics), New York: Springer-Verlag New York Inc., 1994, pogl. Appendix I.

[7] M. U. Ünver. Market Mechanisms for Fair Division with Indivisible Objects and Money. [Elektronski]. Dostopno: https://www2.bc.edu/~unver/research/fairallocation.pdf. [Poskus dostopa: oktober 2015].

[8] Algorithmic Aspects of Game Theory: Lecture 2. (2001). Georgia Tech - College of Computing [Elektronski]. Dostopno: http://www.cc.gatech.edu/~mihail/D.8802readings/Game2.pdf. [Poskus dostopa: oktober 2015].

[9] Fair division. (oktober 2015). Wikipedia, The Free Encyclopedia [Elektronski]. Dostopno: https://en.wikipedia.org/wiki/Fair_division. [Poskus dostopa: oktober 2015].

[10] Fair Division Problems and Fair Division Schemes. University of Colorado at Boulder [Elektronski]. Dostopno: http://www.colorado.edu/education/DMP/fair_division.html. [Poskus dostopa: oktober 2015].

[11] Herbert Scarf. (2015). Wikipedia, The Free Encyclopedia [Elektronski]. Dostopno: https://en.wikipedia.org/wiki/Herbert_Scarf. [Poskus dostopa: november 2015].

[12] MATLAB. (1994-2016). MathWorks [Elektronski]. Dostopno: http://www.mathworks.com/products/matlab. [Poskus dostopa: 2015].

[13] Spliddit. (2014-2016). Dostopno: http://www.spliddit.org. [Poskus dostopa: 2015]